集合値写像の写像度について (変換群と手術理論)

AUTHOR(S):

原, 靖浩

CITATION:

原, 靖浩. 集合値写像の写像度について (変換群と手術理論). 数理解析研究所講究録 2011, 1732: 114-125

ISSUE DATE:

2011-03

URL:

http://hdl.handle.net/2433/170588

数理解析研究所講究録
第 1732 巻 2011 年 114-125

集合値写像の写像度について

大阪大学大学院理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Graduate School of Science, Osaka University

1 はじめに

Górniewicz と Granas は集合値写像の不動点を代数的位相幾何学の手法で研究する中で admissible 写像を定義した ([2]). 本稿では, その admissible 写像の写像度について考察する. admissible 写像とその写像度の定義については 2 節と 3 節でそれぞれ詳しく述べるが, admissible 写像は集合値写像であり, その写像度は連続写像のときとは違い整数の部分集合になる. 大阪大学の大学院生であった森脇氏との共同研究 [4] の中で, 球面への admissible 写像の写像度について調べ, 対合のある多様体の場合に次のような結果を得た.

定理 1. M を n 次元コンパクト多様体で M 上には自由な対合 T が存在するものとする. 2 重被覆 $M \to M_T$ (M_T は T の作用による軌道空間) の第 1 Stiefel-Whitney 類 $c(M,T)$ が $c(M,T)^n \neq 0$ を満たすとき, admissible 写像 $\varphi\colon M \multimap S^n$ がすべての $x \in M$ に対して, $\varphi(T(x)) \cap \varphi(x) = \emptyset$ を満たすならば, 唯一つの奇数 m が存在して $\mathrm{Deg}\varphi = \{m\}$ となる.

定理 2. M を n 次元コンパクト多様体で M 上には自由な対合 T が存在するものとする. このとき, admissible 写像 $\varphi\colon M \multimap S^n$ がすべての $x \in M$ に対して, $\varphi(T(x)) \cap (-\varphi(x)) = \emptyset$ を満たすならば, 唯一つの偶数 m が存在して $\mathrm{Deg}\varphi = \{m\}$ となる. 特に T が向きを変えるならば, $\mathrm{Deg}\varphi = \{0\}$ である.

本稿ではこれらの定理を変換群論的視点から解説することを目的とする.

2 admissible 写像

集合値写像は一般には連続写像のときのようにホモロジーやコホモロジーの準同型を誘導しない. そこで, 集合値写像にいくつか条件をつけたものを考えることになるが, まず, それを述べるための準備をしよう.

以下では位相空間はすべてパラコンパクトな Hausdorff 空間とする. また, コホモロジーは Alexander-Spanier コホモロジーを用いることにする. パラコンパクトな Hausdorff 空間に対しては, Alexander-Spanier コホモロジーは Čech コホモ

ロジーと同型になる．以下では $\bar{H}^p(X)$ により位相空間 X の(整数係数の) p 次 Alexander-Spanier コホモロジー群を表すことにする．

定義. X, Y を位相空間とする．全射である連続写像 $p\colon X \to Y$ が次の二つを満たすとき p を **Vietoris** 写像という．
(i) $p\colon X \to Y$ は閉写像
(ii) 任意の $y \in Y$ に対して, 集合 $p^{-1}(y)$ がコンパクトかつ非輪状.

ここで, 位相空間 X が非輪状 (acyclic) とは, X が連結であり, 任意の $p \in Z$ に対して, $\bar{H}^p(X) = 0$ となることとする．

Vietoris 写像について, 次の Vietori-Begle の定理が成り立つ．

定理 2.1([8]). $p\colon X \to Y$ が Vietoris 写像のとき, $p^*\colon \bar{H}^*(Y) \to \bar{H}^*(X)$ は同型写像である．

さて, 本題である集合値写像について考えよう．X, Y をパラコンパクトなハウスドルフ空間とする．以下では X から Y への 集合値写像 φ は任意の $x \in X$ に対して $\varphi(x)$ が Y の閉集合であるものとし, $\varphi\colon X \multimap Y$ により表すことにする．

$\varphi\colon X \multimap Y$ において, 任意の $x \in X$ と任意の $\varphi(x)$ の近傍 V に対して, x の近傍 U で $\varphi(U) \subset V$ を満たすものが存在するとき, φ は上半連続であるという．

定義. $\varphi\colon X \multimap Y$ を X の各点でコンパクトな値を取るような上半連続集合値写像とする．任意の $x \in X$ に対して, $\varphi(x)$ が非輪状であるとき, φ を非輪状写像と呼ぶ．

φ のグラフ $\Gamma_\varphi = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \varphi(x)\}$ と射影 $p_\varphi\colon \Gamma_\varphi \to X$, $q_\varphi\colon \Gamma_\varphi \to Y$ を考えよう． $\varphi\colon X \to Y$ が非輪状写像のとき, p_φ は Vietoris 写像である． したがって, 定理 2.1 より $p^*\colon \bar{H}^*(X) \to \bar{H}^*(\Gamma_\varphi)$ は同型写像であり, 準同型写像 $(p_\varphi^*)^{-1} q_\varphi^*\colon \bar{H}^*(Y) \to \bar{H}^*(X)$ を得る．この準同型を用いて連続写像のときのように非輪状写像の不動点定理などが得られる ([1] に詳しい)．非輪状写像は重要な研究対象ではあるが, これだけを考えるのでは次に書くような問題点もある．

X, Y, Z をパラコンパクトハウスドルフ空間とする．$\varphi\colon X \multimap Y$, $\psi\colon Y \multimap Z$ を各点でコンパクトな値を取るような上半連続集合値写像とするとき, これらの写像の合成 $\psi \circ \varphi\colon X \multimap Z$ を $x \in X$ に対して

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \bigcup_{y \in \varphi(x)} \psi(y)$$

と定義する．$\psi \circ \varphi\colon X \multimap Z$ は上半連続な集合値写像になっている．

非輪状写像全体を考えると, この集合値写像の合成で閉じていないのである．例えば, $\psi\colon S^n \multimap S^n$ を

$$\psi(x) = \{y \in S^n \mid \|x - y\| \leqq 3/2\}$$

により定義すると, ψ は非輪状であるが, $\psi\circ\psi$ は $\psi\circ\psi(x)=S^n$ となる. S^n のコホモロジー群は $p=n$ のとき, $\bar{H}^p(S^n)\cong Z$ であり, 非輪状ではない. そこで, 非輪状写像を少し拡張して写像の合成について閉じた集合値写像のクラスを定義しよう.

定義. $\varphi\colon X\multimap Y$ を X の各点でコンパクトな値を取るような上半連続集合値写像とする. パラコンパクトハウスドルフ空間 Γ と連続写像 $p\colon\Gamma\to X$, $q\colon\Gamma\to Y$ が存在し, p が Vietoris 写像であり, 任意の $x\in X$ に対して, $q(p^{-1}(x))\subset\varphi(x)$ が成り立つとき φ を **admissible** 写像と呼ぶ.

上の定義の中の p, q を admissible 写像 φ の selected pair と呼び, $(p,q)\subset\varphi$ と表す. $(p,q)\subset\varphi$ のとき, $p^*\colon\bar{H}^*(X;\boldsymbol{Z})\to\bar{H}^*(\Gamma;\boldsymbol{Z})$ が同型写像なので, 準同型写像 $(p^*)^{-1}q^*\colon\bar{H}^*(Y;\boldsymbol{Z})\to\bar{H}^*(X;\boldsymbol{Z})$ を得る.

非輪状写像はグラフとそれからの2つの射影を考えることにより selected pair が与えられ admissible 写像になる. 一般に admissible 写像の selected pair から得られる準同型は selected pair の取り方により異なる. 例えば, $\varphi\colon S^n\multimap S^n$ を $\varphi(x)=S^n$ により定義する. この φ は admissible map である. $\Gamma=S^n$, $p=\mathrm{id}_{S^n}$ とし, q_1 を定値写像, $q_2=\mathrm{id}_{S^n}$ とすれば, $(p,q_1)\subset\varphi$, $(p,q_2)\subset\varphi$ であり, $(p^*)^{-1}q_1^*=0$, $(p^*)^{-1}q_2^*=\mathrm{id}_{H^*(S^n)}$ となり, 異なる準同型である.

さて, 次の命題からわかるように admissible 写像は写像の合成について閉じている.

命題 2.2. X, Y, Z をコンパクトで三角形分割可能な位相空間とする. $\varphi: X\multimap Y$, $\psi: Y\multimap Z$ を admissible 写像とする. このとき, $\psi\circ\varphi: X\multimap Z$ は admissible 写像であって, 任意の selected pair $(p_1,q_1)\subset\varphi$, $(p_2,q_2)\subset\psi$ に対して, 次式を満たすような $\psi\circ\varphi$ の selected pair (p,q) が存在する.

$$(p_1^*)^{-1}q_1^*(p_2^*)^{-1}q_2^*=(p^*)^{-1}q^*$$

証明の概略. $(p_1,q_1)\subset\varphi$, $(p_2,q_2)\subset\psi$ に対し次の可換図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
 & & \Gamma \arrow[dll, dashed, "p"'] \arrow[dl, dashed, "f_1"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "f_2"] \arrow[drr, "q"] & & \\
X & \Gamma_1 \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "q_1"'] & Y & \Gamma_2 \arrow[l, "p_2"] \arrow[r, "q_2"'] & Z
\end{tikzcd}$$

ここで, $\Gamma=\{(z_1,z_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2 |\ q_1(z_1)=p_2(z_2)\}$, $p(z_1,z_2)=p_1(z_1)$, $q(z_1,z_2)=q_2(z_2)$, $f_1(z_1,z_2)=z_1$, $f_2(z_1,z_2)=z_2$, $g(z_1,z_2)=q_1(z_1)$ である.

$a\in\Gamma_1$ に対して $f_1^{-1}(a)$ は $p_2^{-1}(q_1(a))$ と同相で非輪状となる. $p=p_1\circ f_1$ は Vietoris 写像の合成であることから, やはり Vietoris 写像になる. 任意の $x\in X$ に対して $q(p^{-1}(x))\subset(\psi\circ\varphi)(x)$ も簡単に証明でき, 上の図式から誘導されるコホモ

ロジーの準同型について考えることにより, $(p_1^*)^{-1}q_1^*(p_2^*)^{-1}q_2^* = (p^*)^{-1}q^*$ が得られる. ∎

3 admissible 写像の写像度について

M, N を向き付けられた n 次元閉多様体とする. このとき, M, N の Alexander-Spanier コホモロジー群は特異コホモロジーと同型で, $\bar{H}^n(M; \boldsymbol{Z}) \cong \bar{H}^n(N) \cong \boldsymbol{Z}$ である. $[M], [N]$ をそれぞれ M, N の基本ホモロジー類とし, $u_M \in \bar{H}^n(M; \boldsymbol{Z}), u_N \in \bar{H}^n(N; \boldsymbol{Z})$ を $\langle u_M, [M]\rangle = 1$, $\langle u_N, [N]\rangle = 1$ を満たすものとする. ここで, $\langle\, ,\, \rangle$ はクロネッカー積を表している.

$\varphi\colon M \multimap N$ を admissible 写像とし, その selected pair $(p, q) \subset \varphi$ に対して, (p, q) の写像度 $\deg(p, q)$ を $(p^*)^{-1}q^*(u_N) = \deg(p, q)u_M$ を満たすものとして定義する. また, φ の写像度 $\mathrm{Deg}\varphi$ を

$$\mathrm{Deg}\varphi = \{\deg(p, q) \mid (p, q) \subset \varphi\}$$

により定義する. $\mathrm{Deg}\varphi$ は整数の部分集合であることに注意しよう. ただし, 非輪状写像については次の定理が成り立つ.

命題 3.1. M, N を向き付けられた n 次元閉多様体とする. $\varphi\colon M \multimap N$ が非輪状写像のとき, $\mathrm{Deg}\varphi$ はただ 1 つの元からなる集合である.

証明. Γ_φ を φ のグラフとし, $p_\varphi\colon \Gamma_\varphi \to X$, $q_\varphi\colon \Gamma_\varphi \to Y$ を射影とする. 任意の φ の selected pair (p, q) に対して, $f\colon \Gamma \to \Gamma_\varphi$ を $f(x) = (p(x), q(x))$ により定義する. ここで Γ は p と q の定義域の空間である. $p_\varphi \circ f = p$, $q_\varphi \circ f = q$ が成り立ち, 下の図式は可換になる.

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma \arrow[dl, dashed, "p"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd, "f"] & \\
X & & Y \\
 & \Gamma_\varphi \arrow[ul, "p_\varphi"] \arrow[ur, dashed, "q_\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

この可換図式から得られるコホモロジーの可換図式を考え, p_φ および p が Vietoris 写像でコホモロジーの同型を導くことに注意すると $(p_\varphi^*)^{-1}q_\varphi^* = (p^*)^{-1}q^*$ を得る. ∎

admissible 写像とその写像度についていくつか例を挙げておこう.

例. (1) $\varphi\colon S^n \multimap S^n$ を各点 $x \in S^n$ に対して, $\varphi(x) = S^n$ により定義するとき, $\mathrm{Deg}\varphi = \boldsymbol{Z}$ である. 実際, $\Gamma = S^n$ とし, $p = \mathrm{id}_{S^n}$, $q\colon S^n \to S^n$ を写像度 k の連続写像とすれば, $(p, q) \subset \varphi$ で $\deg(p, q) = k$. q の写像度 k はどのような整数値も取ることができるので, $\mathrm{Deg}\varphi = \boldsymbol{Z}$ がわかる.

(2) $S^2=\{(z,x)\in \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{R}\,|\,|z|^2+x^2=1\}$ とし, $\varphi_m\colon S^2 \multimap S^2$ $(m\in\boldsymbol{Z})$ を次のように定義する.

$$\varphi_m(z,x)=\begin{cases}\{(0,1)\} & (x>0)\\ \{(\sqrt{1-t^2}z^m,t\,|\,-1\leqq t\leqq 1\} & (x=0)\\ \{(0,-1)\} & (x>0)\end{cases}.$$

このとき, φ_m は非輪状写像であり, $\mathrm{Deg}\varphi_m=\{m\}$ となる.

(3) S^2 は (2) と同じものとし, $p_N=(0,1)$, $p_S=(0,-1)$ とおく. $\varphi\colon S^2\to S^2$ を次のように定義する.

$$\varphi(z,x)=\begin{cases}\{p_N,p_S\} & (t>0)\\ \{(\sqrt{1-s^2}z^m,s)\in S^2\,|\,-1\leqq s\leqq 1\} & (x=0)\\ \{p_N,p_S\} & (t<0)\end{cases}.$$

このとき, $\mathrm{Deg}\varphi=\{-m,0,m\}$ となる. これは次のように示すことが出来る.

$(p,q)\subset\varphi$ とする. このとき, $q(p^{-1}(p_N))$ および $q(p^{-1}(p_S))$ は連結であり, $\{p_N\}$ または $\{p_S\}$ となる. それぞれの場合について考えると,

$q(p^{-1}(p_N))=p_N$, $q(p^{-1}(p_S))=p_N$ のときは, (p,q) は

$$\psi(z,x)=\begin{cases}\{p_N\} & (t>0)\\ \{(\sqrt{1-s^2}z^m,s)\in S^2\,|\,-1\leqq s\leqq 1\} & (x=0)\\ \{p_N\} & (t<0)\end{cases}.$$

という非輪状写像 ψ の selected pair にもなっている. ψ の selected pair としては写像度 0 のものが取れるので, この (p,q) の写像度も 0 になる. $q(p^{-1}(p_N))=p_S$, $q(p^{-1}(p_S))=p_S$ のときも同様である.

$q(p^{-1}(p_N))=p_N$, $q(p^{-1}(p_S))=p_S$ のとき, (p,q) は上の例 (2) の selected pair になっていて, φ_m は非輪状写像なので $\deg(p,q)=m$ である.

同様に $q(p^{-1}(p_N))=p_S$, $q(p^{-1}(p_S))=p_N$ のとき, (p,q) は写像度が $-m$ の非輪状写像の selected pair になっていて, $\deg(p,q)=-m$ となる.

以上で, $\mathrm{Deg}\varphi=\{-m,0,m\}$ が示された.

(4) S^2 は (2), (3) と同じものとし, $\varphi_{(m,n)}\colon S^2\multimap S^2$ $(m,n\in\boldsymbol{Z},\ m<n)$ を $\varphi_{(m,n)}(x)=\varphi_m(x)\cup\varphi_n(x)$ により定義する (φ_m は (2) で定義したもの). このとき, $\mathrm{Deg}\varphi_{(m,n)}\supset\{k\in\boldsymbol{Z}\,|\,m\leqq k\leqq n\}$ である. $\mathrm{Deg}\varphi_{(m,n)}=\{k\in\boldsymbol{Z}\,|\,m\leqq k\leqq n\}$ と予想されるが, まだ証明はできていない.

次に合成写像の写像度について考えてみよう.

L, M, N を向き付けられた n 次元閉多様体とする.

$\varphi\colon L \multimap M$, $\psi\colon M \multimap N$ を admissible 写像とすると, $\psi\circ\varphi$ は命題 2.2 より admissible 写像である. $\psi\circ\varphi$ の写像度について次のことがわかる.

命題 3.2. 上の状況の下で

$$(\mathrm{Deg}\psi)(\mathrm{Deg}\varphi) \subset \mathrm{Deg}(\psi\circ\varphi)$$

が成り立つ. ここで $(\mathrm{Deg}\psi)(\mathrm{Deg}\varphi) = \{m_1\cdot m_2 \,|\, m_1 \in \mathrm{Deg}\psi,\, m_2 \in \mathrm{Deg}\varphi\}$ である.

証明. $m \in (\mathrm{Deg}\psi)(\mathrm{Deg}\varphi)$ とすると, $(p_1, q_1) \subset \mathrm{Deg}\varphi$ と $(p_2, q_2) \subset \mathrm{Deg}\psi$ で $\deg(p_1, q_1)\deg(p_2, q_2) = m$ となるものが存在する.

命題 2.2 より, 次式を満たすような $\psi\circ\varphi$ の selected pair (p, q) が存在する.

$$(p_1^*)^{-1}q_1^*(p_2^*)^{-1}q_2^* = (p^*)^{-1}q^*$$

このとき, $\deg(p, q) = m$ なので $m \in \mathrm{Deg}(\psi\circ\varphi)$. よって, $(\mathrm{Deg}\psi)(\mathrm{Deg}\varphi) \subset \mathrm{Deg}(\psi\circ\varphi)$ が成り立つ. ∎

注意. 上の命題について, $(\mathrm{Deg}\psi)(\mathrm{Deg}\varphi) = \mathrm{Deg}(\psi\circ\varphi)$ は一般にはなりたたない.

例えば, 前にも例に挙げているが, $\psi\colon S^n \multimap S^n$ を $\psi(x) = \{y \in S^n \,|\, \|x - y\| \leqq 3/2\}$ により定義すると, ψ は非輪状で $\mathrm{Deg}\psi = \{1\}$ となり, $(\mathrm{Deg}\psi)(\mathrm{Deg}\psi) = 1$ であるが, $\psi\circ\psi$ は $\psi\circ\psi(x) = S^n$ なので, $\mathrm{Deg}(\psi\circ\psi) = Z$ であり, $(\mathrm{Deg}\psi)(\mathrm{Deg}\psi) \neq \mathrm{Deg}(\psi\circ\psi)$ である.

先に挙げた例の (1) で, 任意の $x \in S^n$ に対して $\varphi(x) = S^n$ で定義される集合値写像 $\varphi\colon S^n \multimap S^n$ の写像度が Z になることを示したが, 球面への admissible 写像の写像度について, [4] で次の定理を得た. 本稿ではこの定理の証明は省略することにする.

定理 3.3. M を n 次元コンパクト多様体とする. このとき, admissible 写像 $\varphi\colon M \multimap S^n$ がある $a \in M$ に対して, $\varphi(a) = S^n$ を満たし, その a に対して φ の selected pair (p, q) で $p^{-1}(a)$ が可縮となるようなものが存在すれば, $\mathrm{Deg}\varphi = Z$ となる.

4 定理 1, 2 の証明について

この節では定理 1 と 2 について変換群論の視点から考察し, その証明を与える. 多様体上に対合を考えることは, 位数 2 の群の作用を考えることと同じである.

球面に対心作用を考えるとき, 次の事実が Borsuk-Ulam の定理を導く定理としてよく知られている.

事実 1. 球面に対心作用を考えるとき, 球面からそれ自身への同変写像の写像度が奇数になる.

この球面間の同変写像の写像度に関する事実は様々な一般化がなされている. 著者は [5] において, 分類空間への写像の kernel で定まるイデアル値 index を用いた一般化について書いている. 作用する群 G の位数が 2 の場合には, G の生成元を T とすると, [5] の中で $\mathrm{Ind}_n^G(M; Z_2) \neq H^n(BG; Z_2)$ と書いてあるのは, $c(M,T)^n \neq 0$ と同値である. したがって, $c(M,T)^n \neq 0$ となる多様体 M から対心作用を考えた球面 S^n への同変写像の写像度は奇数になる. このことを admissible 写像へと一般化することを考えよう.

admissible 写像 $\varphi\colon M \multimap S^n$ が同変写像とはどういうものか？というのが, まず考えならなければならない問題である. 最初に思いつくのは, $\varphi(T(x)) = -\varphi(x)$ や $\varphi(T(x)) \cap (-\varphi(x)) \neq \emptyset$ というような条件であるが, このような条件では, 同変というのには問題がある. 次の例を見てみよう.

例. $\varphi\colon S^n \multimap S^n$ を $(x_0, \ldots, x_n) \in S^n$ に対して

$$\varphi(x_0, \ldots, x_n) = \{(y_0, \ldots, y_n) \in S^n \mid y_n = 0\}$$

により定義する. このとき, φ は $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ および $\varphi(-x) \cap (-\varphi(x)) \neq \emptyset$ を満たしている. 一方, 任意の selected pair $(p, q) \subset \varphi$ に対して, q が全射でないことより, $\deg(p, q) = 0$ がわかる. したがって, $\mathrm{Deg}\varphi = \{0\}$ である.

この例を見てわかるように, $\varphi(T(x)) = -\varphi(x)$ や $\varphi(T(x)) \cap (-\varphi(x)) \neq \emptyset$ という条件で事実 1 を一般化することはできない. 四反田氏は [7] において, 次のように同変 admissible 写像を定義している.

定義. X と Y をパラコンパクト Hausdorff 空間で, その上には対合 T と T' がそれぞれあるものとする. admissible 写像 $\varphi\colon X \multimap Y$ にたいして, 自由な対合を持つようなパラコンパクト Hausdorff 空間 Γ および同変 Vietoris 写像 $p\colon \Gamma \to X$, 同変写像 $q\colon \Gamma \to Y$ が存在して, $q(p^{-1}(x)) \subset \varphi(x)$ が任意の $x \in X$ で成り立つとき, φ を同変 admissible 写像という.

このように定義すると, [7] にあるように通常の同変写像に関するいくつかの結果を同変 admissible 写像に拡張することができる. ただし, admissible 写像 φ を見て同変か否かを判断することが難しい場合もあるかもしれない.

ところで, 次の事実 1' は事実 1 に簡単に帰着できる命題である.

事実 1'. $f\colon S^n \to S^n$ が任意の $x \in S^n$ において, $f(-x) \neq f(x)$ を満たすとき, $\deg f$ は奇数である.

事実 1 ⇒ 事実 1' の証明. 任意の $x \in S^n$ において $f(-x) \neq f(x)$ より, 任意の $x \in S^n$ において $f(x) - f(-x) \neq 0$ である. したがって, $g\colon S^n \to S^n$ を $g(x) = (f(x) - f(-x))/\|f(x) - f(-x)\|$ により定義することができる. f と g のホモトピー $F\colon S^n \times [0,1] \to S^n$ を $F(x,t) = ((2-t)f(x) - tf(-x))/\|(2-t)f(x) - tf(-x)\|$

により定義できるので, f と g はホモトピックであり, $\deg f = \deg g$ となる. g は同変写像なので, 事実 1 より $\deg g$ は奇数. よって $\deg f$ も奇数となる.

[1] では $\varphi(-x) \cap (\varphi(x)) = \emptyset$ が S^n の各点 x で成り立つとき, $\mathrm{Deg}\varphi \neq \{0\}$ ということが紹介されている. これは事実 1' の一般化である. 定理 1 はこれをさらに詳しく考察し, 一般化した結果となっている.

さて, 定理 1 の証明について考えることにしよう.

M を n 次元コンパクト多様体で M 上には自由な対合 T が存在するものとする. また, 2 重被覆 $M \to M_T$ (M_T は T の作用による軌道空間) の第 1 Stiefel-Whitney 類 $c(M,T)$ が $c(M,T)^n \neq 0$ を満たすことを仮定する. $\varphi\colon M \multimap S^n$ を admissible 写像で, すべての $x \in M$ に対して, $\varphi(T(x)) \cap \varphi(x) = \emptyset$ を満たすものとしよう.

まず, $(p,q) \subset \varphi$ とするとき, $\deg(p,q)$ が奇数になることを示す.

Γ を p と q の定義域の空間とする. 事実 1 を使って事実 1' を証明したときのように, 同変写像とのホモトピーを作ることを考えよう. そのためには, Γ に作用がないことが問題になるので, 次のように作用のある空間を作り直す.

$$X = \{(y,y') \in \Gamma \times \Gamma |\, p(y) = T(p(y'))\}\ .$$

$(y,y') \in X$ のとき, $p(y) = T(p(y))$ より, $T(p(y)) = T^2(p(y')) = p(y')$ なので $(y',y) \in X$. よって, $T'\colon X \to X$ を $T'(y,y') = (y',y)$ により定義することができる. $y = y'$ とすると, $p(y) = p(y')$ であり, T が自由な対合であることから $p(y) \neq T(p(y'))$. よって, $y = y'$ のときには $(y,y') \notin X$ である. したがって, T' は自由な対合になっている. 次の可換図式を考えよう

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "\pi"] & S^n \\
M & \Gamma \arrow[l, "p"] \arrow[u, "q"']
\end{tikzcd}$$

ここで $s(y,y') = p(y)$, $f(y,y') = q(y)$, $\pi(y,y') = y$ ($(y,y') \in X$) である. s は同変写像になっていて, $s^{-1}(x) = p^{-1}(x) \times p^{-1}(T(x))$ であり, Vietoris 写像にもなっている. また, π も $\pi^{-1}(y) = p^{-1}(T(p(y)))$ であるので Vietoris 写像にもなっていることに注意しておこう. 任意の $(y,y') \in X$ に対して, $x = p(y)$ とおくと $q(y) \in q(p^{-1}(x)) \subset \varphi(x)$ and $q(y') \in q(p^{-1}(T(x))) \subset \varphi(T(x))$ となり, $\varphi(T(x)) \cap \varphi(x) = \emptyset$ より $q(y) \neq q(y')$ となる. したがって, $f(y,y') = q(y) \neq q(y') = f(T'(y,y'))$ であり, $-tf(T'(y,y')) + (2-t)f(y,y') = 2(t/2(-f(T'(y,y'))) + (1-t/2)f(y,y')) \neq 0$ が成り立つ. 同変写像 $f'\colon X \to S^n$ を

$$f'(y,y') = \frac{-f(T'(y,y')) + f(y,y')}{\|-f(T'(y,y')) + f(y,y')\|}$$

により定義すると, f と f' のホモトピー $F: X \times [0,1] \to S^n$ が

$$F(y, y', t) = \frac{-tf(T'(y,y')) + (2-t)f(y,y')}{\| -tf(T'(y,y')) + (2-t)f(y,y') \|}$$

により定義できる. ゆえに $f^* = f'^*: \bar{H}^*(S^n) \to \bar{H}^*(X)$ である.

$\pi_X: X \to X_{T'}$, $\pi_M: M \to M_T$ を軌道空間への射影とすると, s が同変写像なので, $\bar{s} \circ \pi_X = \pi_M \circ s$ をみたすような $\bar{s}: X_T \to M_T$ が存在する. このとき, $\bar{s}$ も Vietoris 写像になっていて, $c(X, T')$ を Z_2-bundle $X \to X_{T'}$ の第1 Stiefel-Whitney 類とすると, $\bar{s}^*: \bar{H}^*(M_T; Z_2) \to \bar{H}^*(X_{T'}; Z_2)$ は同型で $c(M, T)^n \neq 0$ が成り立っているので, $c(X, T')^n \neq 0$ となる.

ここで, 次の可換図式を考えよう.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & S^n \\ {\scriptstyle \pi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_S} \\ X_{T'} & \xrightarrow{\bar{f}'} & \boldsymbol{RP}^n \end{array}$$

f' が同変写像なので, この図式を可換にするような $\bar{f}'$ が存在する. $c(X, T')^n \neq 0$ なので, $(\bar{f}')^*: \bar{H}^n(\boldsymbol{RP}^n; Z_2) \to \bar{H}^n(X_T; Z_2)$ は同型である. トランスファー $(\pi_S)^!: \bar{H}^n(S^n; Z_2) \to \bar{H}^n(\boldsymbol{RP}^n; Z_2)$ と $(\pi_X)^!: \bar{H}^n(X; Z_2) \to \bar{H}^n(X_T; Z_2)$ が同型であり, $(\pi_X)^! \circ f'^* = (\bar{f}')^* \circ (\pi_S)^!: \bar{H}^n(S^n; Z_2) \to \bar{H}^n(X_{T'}; Z_2)$ が成り立つので, $f'^*: \bar{H}^n(S^n; Z_2) \to \bar{H}^n(X; Z_2)$ は同型である. したがって,

$$(p^*)^{-1} q^* = (p^*)^{-1} (\pi^*)^{-1} \pi^* q^* = (s^*)^{-1} f^* = (s^*)^{-1} f'^*$$

は $\bar{H}^n(S^n; Z_2)$ から $\bar{H}^n(M; Z_2)$ への同型写像になる. よって $\deg(p, q)$ は奇数である.

次に $\mathrm{Deg}\varphi$ が唯一つの元からなることを示す. (p_1, q_1) と (p_2, q_2) を φ の selected pair とする. Γ_1 を p_1, q_1 の定義域, Γ_2 を p_2, q_2 の定義域とする. このときも上のときと同様に群の作用のある空間を考えなければならない.

$$\Gamma = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \Gamma_1 \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_2 \,|\, p_1(a_1) = p_2(a_3) = T(p_1(a_2)) = T(p_2(a_4))\}$$

により Γ を定義し, Γ 上の作用 T' を $T'(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_2, a_1, a_4, a_3)$ により定義する. $p: \Gamma \to M$, $q'_1: \Gamma \to S^n$, $q'_2: \Gamma \to S^n$ を $p(a_1, a_2, a_3, a_4) = p_1(a_1)(= p_2(a_3))$, $q'_1(a_1, a_2, a_3, a_4) = q_1(a_1)$, $q'_2(a_1, a_2, a_3, a_4) = q_2(a_3)$ によりそれぞれ定義する. $\pi_1: \Gamma \to \Gamma_1$ を第1成分への射影, $\pi_3: \Gamma \to \Gamma_3$ を第3成分への射影とすると, $q'_1 p^{-1}(x) = q_1(\pi_1(\pi_1^{-1}(p_1^{-1}(x)))) \subset \varphi(x)$ と $q'_2 p^{-1}(x) = q_2(\pi_2(\pi_2^{-1}(p_2^{-1}(x)))) \subset \varphi(x)$ が成り立つ. よって, $q'_1(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \varphi(p(a_1, a_2, a_3, a_4))$, $q'_2(T'(a_1, a_2, a_3, a_4)) \in \varphi(T(p(a_1, a_2, a_3, a_4)))$ である. $\varphi(p(a_1, a_2, a_3, a_4)) \cap \varphi(T(p(a_1, a_2, a_3, a_4))) = \emptyset$ なの

で, $0 \leqq t \leqq 1$ となる t に対して, $tq_1'(a_1,a_2,a_3,a_4)-(1-t)q_2'(T'(a_1,a_2,a_3,a_4)) \neq 0$ である.

$q_2'': \Gamma \to S^n$ を $q_2''(a_1,a_2,a_3,a_4) = -q_2'(T'(a_1,a_2,a_3,a_4))$ により定義する. q_1' と q_2'' のホモトピー $F: \Gamma \times I \to S^n$ が

$$F(a_1,a_2,a_3,a_4,t) = \frac{tq_1'(a_1,a_2,a_3,a_4)-(1-t)q_2'(T'(a_1,a_2,a_3,a_4))}{\|tq_1'(a_1,a_2,a_3,a_4)-(1-t)q_2'(T'(a_1,a_2,a_3,a_4))\|}$$

により定義される. このことから $\deg(p,q_1') = \deg(p,q_2'')$ が示される.

n が奇数のとき, $c(M,T)^n \neq 0$ であることから, 奇数次元の球面上の対心作用と同様で T は向きを保つ作用になっている. つまり $T^* = \mathrm{id}_{\bar{H}^n(M;Z)} : \bar{H}^n(M;Z) \to \bar{H}^n(M;Z)$ である. p が Vietoris 写像でコホモロジーの同型を誘導することから $(T')^* = \mathrm{id}_{\bar{H}^n(\Gamma;Z)} : \bar{H}^n(\Gamma;Z) \to \bar{H}^n(\Gamma;Z)$ を得る. $(-\mathrm{id}_{S^n})^* = \mathrm{id}_{\bar{H}^n(S^n;Z)} : \bar{H}^n(S^n;Z) \to \bar{H}^n(S^n;Z)$ が成り立っているので,

$$(q_1')^* = (T')^*(q_2')^*(-\mathrm{id}_{S^n})^* = (q_2')^*.$$

n が偶数のときは $c(M,T)^n \neq 0$ であることから, 偶数次元の球面上の対心作用と同様で T は向きを変える作用になっている. $T^* = -\mathrm{id}_{\bar{H}^n(M;Z)} : \bar{H}^n(M;Z) \to \bar{H}^n(M;Z)$ から $(T')^* = -\mathrm{id}_{\bar{H}^n(\Gamma;Z)} : \bar{H}^n(\Gamma;Z) \to \bar{H}^n(\Gamma;Z)$ を得る. $(-\mathrm{id}_{S^n})^* = -\mathrm{id}_{H^n(S^n)} : H^n(S^n;Z) \to H^n(S^n;Z)$ なので,

$$(q_1')^* = (T')^*(q_2')^*(-\mathrm{id}_{S^n})^* = -(T')^*(q_2')^* = (q_2')^*$$

である.

よって, すべての n で $(q_1')^* = (q_2')^*$ である.

π_1 と π_3 は Vietoris 写像になっていて, $\pi_1^*: \bar{H}^n(\Gamma_1;Z) \to \bar{H}^n(\Gamma;Z)$ と $\pi_3^*: \bar{H}^n(\Gamma_2;Z) \to \bar{H}^n(\Gamma;Z)$ は同型である. したがって,

$$\begin{aligned}(p_1^*)^{-1}q_1^* &= (p_1^*)^{-1}(\pi_1^*)^{-1}\pi_1^*q_1^* = ((p_1\circ\pi_1)^*)^{-1}(q_1\circ\pi_1)^* = (p^*)^{-1}(q_1')^* \\ &= (p^*)^{-1}(q_2')^* = ((p_2\circ\pi_3)^*)^{-1}(q_2\circ\pi_3)^* = (p_2^*)^{-1}q_2^*\end{aligned}$$

となり $\deg(p_1,q_1) = \deg(p_2,q_2)$ を得る. ∎

定理 2 の証明については, 球面上の作用が自明なものと考えれば, やはり同変写像とそれへのホモトピーを構成することになる.

X および次の可換図式の s, f, π は定理 1 の証明中と同じものとする.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "\pi"] & S^n \\ M & \Gamma \arrow[l, "p"] \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd}$$

今度は $\varphi(T(x))\cap(-\varphi(x))=\emptyset$ なので, 任意の $(y,y')\in X$ に対して, $q(y)\neq -q(y')$ となる. よって, $f(y,y')=q(y)\neq -q(y')=-f(T'(y,y'))$ であり, 任意の実数 t に対して $tf(T'(y,y'))+(2-t)f(y,y')=2(t/2(f(T'(y,y')))+(1-t/2)f(y,y'))\neq 0$ が成り立つ. 同変写像 $f': X\to S^n$ (球面には自明な作用) を

$$f'(y,y')=\frac{f(T'(y,y'))+f(y,y')}{\|f(T'(y,y'))+f(y,y')\|}$$

により定義すると, f と f' のホモトピー $F: X\times[0,1]\to S^n$ が

$$F(y,y',t)=\frac{tf(T'(y,y'))+(2-t)f(y,y')}{\|tf(T'(y,y'))+(2-t)f(y,y')\|}.$$

により定義できる. ゆえに $f^*=f'^*:\bar{H}^*(S^n)\to\bar{H}^*(X)$ である.

$X_{T'}$ により X の対合 T' による軌道空間を表し, $\pi_X: X\to X_{T'}$ を軌道写像とする. このとき, 次の図式を可換にする $\overline{f'}: X_{T'}\to S^n$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & S^n \\ {\scriptstyle\pi_X}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle\overline{f'}} \\ & X_{T'} & \end{array}$$

この可換図式から次のコホモロジーの可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} \bar{H}^n(S^n;Z_2) & \xrightarrow{f'^*} & \bar{H}^n(X;Z_2) \\ {\scriptstyle\overline{f'}^*}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle\pi_X^*} \\ & \bar{H}^n(X_{T'};Z_2) & \end{array}$$

$\pi_X^*=0: \bar{H}^n(X_{T'};Z_2)\to\bar{H}^n(X;Z_2)$ なので, $f'^*=0: \bar{H}^n(S^n;Z_2)\to\bar{H}^n(X;Z_2)$. したがって, $\deg(p,q)=\deg(s,f')$ は偶数になる.

特に T が向きを変える対合であるとき, $T\circ s=s\circ T'$ より次のコホモロジーの可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} \bar{H}^n(M;Z) & \xrightarrow{T^*} & \bar{H}^n(M;Z) \\ {\scriptstyle s^*}\downarrow & & {\scriptstyle s^*}\downarrow \\ \bar{H}^n(X;Z) & \xrightarrow{(T')^*} & \bar{H}^n(X;Z) \end{array}$$

s^* は同型で, T が向きを変える対合なので, $T^*=-\mathrm{id}_{\bar{H}^n(M;Z)}$ となる. よって, 可換図式から $(T')^*=-\mathrm{id}_{\bar{H}^n(X;Z)}$ を得る. $f'=f'\circ T'$ であることに注意すると, $(f')^*=(T')^*(f')^*=-(f')^*$. したがって, $(f')^*: \bar{H}^n(S^n;Z)\to\bar{H}^n(X;Z)$ は自明な準同型であり, $\deg(p,q)=\deg(s,f')=0$ である.

T が向きを変えないときの $\deg(p,q)$ の一意性については, 球面には自明な作用を考えているため, すべての n に対して向きを変えないことに注意すると定理 1 の n が奇数の場合のときとほぼ同様に証明できる. ∎

参考文献

[1] L. Górniewicz, *Topological fixed point theory of multivalued mappings*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[2] L. Górniewicz and A. Granas, Fixed point theorems for multi-valued mappings of the absolute neighbourhood retracts. J. Math. Pures Appl. (9) 49 (1970), 381–395.

[3] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, 2004.

[4] Y. Hara and Y. Moriwaki, The degree of admissible maps from manifolds to spheres, preprint.

[5] Y. Hara, The degree of equivariant maps, Topology and its Appl. 148(2005), 113–121.

[6] M. Nakaoka, 不動点定理とその周辺, 岩波書店, 1977.

[7] Y. Shitanda, A generalization of antipodal point theorems for set-valued mappings, Hokkaido Math. J. 39(2010), 217–238

[8] E. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1966.